В задачах с ограничениями линеаризуются и ограничения, и целевые функции, а направления необходимо выбирать так, чтобы они приводили к допустимым точкам https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image001.gif.

Рассмотрим задачу с ограничениями в виде неравенств

f(x) → min,

https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image002.gif, https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image003.gif. (1)

Пусть x0 - начальная точка, удовлетворяющая ограничениям:

https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image004.gif, https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image005.gif.

Предположим, что некоторые ограничения являются *активными* в точке x0:

https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image006.gif, https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image007.gif.

Вектор d определяет допустимое направление для поиска, если d - направление спуска, т. е.

▽f(x)d < 0 (2)

и точки луча x(α) = x0 + α d, где α ≥ 0 (3)

являются допустимыми на небольшом расстоянии от x0.

Неравенство ▽f(x)d < 0 получается следующим образом.

Разложим в ряд Тейлора функцию f(x) в точке x0:

f(x)=f(x0)+▽fT(x)(x-x0).

В направлении спуска в допустимых точках должно выполняться неравенство:

f(x)<f(x0), следовательно, ▽f(x0)(x0)<0.

Вводя обозначение x- x0=d, получим искомый результат.

Точки x(α) будут допустимыми, если для всех активных ограничений выполняется условие:

https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image014.gif, (4)

Так как по предположению

https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image015.gif, https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image016.gif и https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image017.gif,

то выражение (4) эквивалентно следующему условию для d:

https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image018.gif. (5)

*Основная идея:* на каждом шаге итерации определяется допустимое направление, т. е. вектор d и скалярный параметр θ>0, такие, чтобы выполнялись следующие неравенства:

https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image019.gif, https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image020.gif, https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image021.gif, (6)

а значение θ выбирается по возможности большим.

При реализации на ЭВМ допустимые направления удобно нормировать, вводя границы

https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image023.gif, https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image024.gif. (7)

Такой способ выбора вектора d обеспечивает разумный компромисс между движением внутрь области допустимых значений без нарушения ограничений и движением по направлению наискорейшего спуска.

После того, как вектор d выбран, очередное приближение может быть определено поиском минимального значения α вдоль прямой

x=x0 + α d0(8)

до тех пор, пока либо f(x) не достигнет экстремума, либо пока какое-либо из ограничений не окажется нарушенным.

Обычно для каждого ограничения gi(x)≥0 находятся значения αi>0, при которых

gi(x0 + α d0)=0, (9)

а затем определяется https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image025.gif как наименьшее из αi

https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image026.gif.

При известном значении https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image027.gif можно использовать любую процедуру одномерного поиска для определения α, которое минимизирует функцию

f(x0 + αd0) на отрезке https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image028.gif.

**Основной алгоритм Зойтендейка**

В данной допустимой точке https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image029.gif определяется множество индексов тех ограничений, которые активны в xt в пределах заданной погрешности ε , т. е.

https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image030.gif,

где ε - заданная погрешность.

Полная итерация метода возможных направлений состоит из следующих трех этапов:

Шаг 1. Решить ЗЛП:

θ → max

https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image031.gif

https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image032.gif, https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image033.gif, https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image034.gif, https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image035.gif.

Пусть dt и θt - полученное решение.

Шаг 2. Если θt ≤ 0, то конец, т. к. дальнейшее улучшение невозможно.

Иначе:

Найти https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image036.gif.

Если не существует https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image037.gif, положить https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image038.gif, например, https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image039.gifhttps://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image040.gif.

При поиске https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image027.gif как https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image041.gif может оказаться, что не для всех https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image005.gif будет выполняться равенство *gi(xt+αdt)=0*; значит, мы определяем сразу It множество индексов, для которых gi=0.

Шаг 3. Найти такое αt, что

https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image043.gif.

Положить xt+1 = xt + αtdt и продолжить решение.

При определении множества активных ограничений It и α учитывается погрешность, роль которой рассматривается ниже.

**Критерии останова процесса итераций**:

1. y ≤ 0

2. |▽f(Xk)| < ε

3. Δf(X) = |f(Xk) - f(Xk-1)| < ε

4. ΔX = |Xk - Xk-1| < ε

**ПРИМЕР 1**.

https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image044.gif;

https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image045.gif;

https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image046.gif.

Начальное допустимое значение x0=(3;-1); f(x0) = 16.

Вычислим градиент в точке x0:

https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image047.gif;

https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image048.gif;

https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image049.gif.

Вычислим значение функций g1 и g2 в точке x0=(3;-1):

g1(3;-1)=4; g2(3;-1)=3.8.

Таким образом, нет активных ограничений: I0={} и первая подзадача принимает вид

θ → max

-8d2 + θ ≤ 0

-1 ≤ di ≤ 1

Находим оптимальное решение: θ =8; d\*=(0;1)

Теперь на луче x=x0+αd,

https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image050.gif, α > 0

требуется найти точку, в которой он пересекает границу области S.

Подставим эту точку в первое ограничение:

g1(x) = 2\*3 – (-1+α)2 -1 = α2 - 2α – 4 = 0, -1.2361 ≤ α ≤ 3.2361

С учетом α > 0, получим 0 < α ≤ 3.2361

g2(α) = 9 – 0.8(3)2 – 2(-1+α) = 3.8α – 2, 0 ≤ α ≤ 1.9

Отсюда α = min{3.2361; 1.9} = 1.9

Исследуем отрезок 0 < α ≤ 1.9 для определения экстремальной точки функции

f(α) = (3 - 3)2 + (-1+α-3)2 = (α-4)2 → min

Поэтому α = 4 < 1.9

x1 = x0 + αd = (3; 0.9)

2-я итерация:

x1 = (3; 0.9)

g1(x1) = 4,19

g2(x2) = 0

Таким образом, активное ограничение g2: I0={2}

https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image051.gif; https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image052.gif;

https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image053.gif.

Далее решается ЗЛП:

θ → max

0\*d1 -4.2d2 + θ ≤ 0

-4,8d1 -2d2 - θ ≥ 0

-1 ≤ di ≤ 1

Решение этой задачи d1=(-1;0.774) и θ=3,25.

Поиск на луче x = x1 + αd1

https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image054.gif, α > 0

требуется найти точку, в которой он пересекает границу области S.

Подставим эту точку в первое ограничение:

g1(x) = 2\*(3-α) – (0.9+0.774α)2 -1 = 0.599α2 + 3.393α – 4.19 = 0, -6.706 ≤ α ≤ 1.04

С учетом α > 0, получим 0 < α ≤ 1.04

g2(α) = 9 – 0.8(3-α)2 – 2(0.9+0.774α), 0 M α ≤ 4.065

Отсюда α = min{1.04; 4.065} = 1.04

Исследуем отрезок 0 ≤ α ≤ 1.04 для определения экстремальной точки функции

f(α) = (3-α - 3)2 + (0.9+0.774α -3)2 = 1.599α2 – 3.25α +4.41→ min

Поэтому α = 1.01 < 1.04

x1 = x0 + αd = (1.99; 1.68)

g1(x1) = 0,15

g2(x2) = 2.46

Таким образом, нет активных ограничений: I0={}

Итеративный процесс можно продолжить подобным образом вплоть до достижения точки минимума x\*(2.5; 2) в пределах заданной погрешности. Итерации показаны на рисунке.

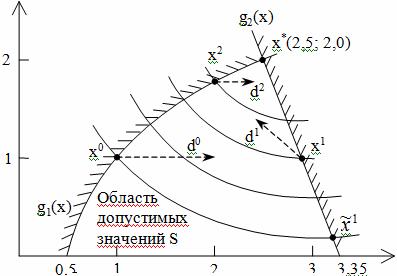


Рис. 1 – Область допустимых значений

В алгоритме Зойтендейка учитываются только активные ограничения в данной допустимой точке, при этом получается зигзагообразный процесс, замедляющий решение, а в некоторых случаях приводящий к "заеданию" - тип *ложной сходимости*.

К методам, свободным от этих недостатков, можно отнести метод https://math.semestr.ru/optim/images/1/zoytendeyk-image056.gif-возмущений и метод Топкинса и Вейнотта.

Методами допустимых направлений нельзя непосредственно пользоваться для решения задач с нелинейными ограничениями-равенствами hk(x)=0. В этом случае эти ограничения-равенства необходимо ослабить, допустив ограниченное перемещение вне поверхности, задаваемой ограничениями

- ε ≤ hk(x) ≤ ε.

Однако если ε мало, то одномерный поиск осуществляется небольшими шагами и скорость процесса невелика. С другой стороны, если допускается ограниченное движение вне границ области допустимых значений S, облегчающее выбор допустимого направления, то итеративное решение соответствующих ограничениям уравнений нужно проектировать на область S (рис 2).

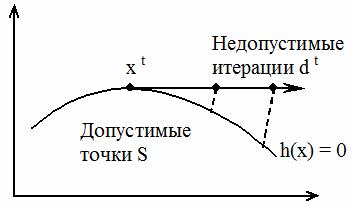


Рис. 2

Другим существенным недостатком метода допустимых направлений является необходимость решения подзадач ЛП.

(x1-3)^2+(x2-3)^2

g1 = 2x1-x2^2-1 >= 0

g2 = 9-0.8x1^2-2x2 >= 0

Начиная из точки (3; -1). Точность E = 0.1

f(x)=(x1-3)2+(x2-3)2

g1=2\*x1-x22-1≥0

g2=-0.8\*x12-2\*x2+9≥0

Итерация №0

Начальное допустимое значение:

x0 = (3;-1), f(x0) = 16

Вычислим градиент в точке x0:

▽f(x0)=[2\*x1-6;2\*x2-6]=[0;-8]

▽g1=[2;-2\*x2] = (2;2)

▽g2=[-1.6\*x1;-2] = (-4.8;-2)

Вычислим значение функций в точке x0 = (3;-1):

g1(3;-1)=4

g2(3;-1)=3.8

Активных ограничений не имеется.

Таким образом, имеется следующая задача ЛП:

y → max

0d1 -8d2 + y ≤ 0

-1 ≤ d1 ≤ 1

-1 ≤ d2 ≤ 1

Оптимальным решением этой ЗЛП является d0(0; 1), y=8

Теперь на луче x=x0+αd требуется найти точку, в которой он пересекает границу области S (α > 0).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x = | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | |  | | --- | | 3 | | -1 | |  | | + α | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | |  | | --- | | 0 | | 1 | |  | |  |

Подставим точку x в ограничение g1

g1=-(a-1)2+5 ≥ 0

Получаем корни:

α = (3.236)

Подставим точку x в ограничение g2

g2=-2\*a+3.8 ≥ 0

Получаем корни:

α = (1.9)

Исследуем отрезок для определения экстремальной точки функции:

f(x)=(a-4)2 = min

f'(x)=2\*a-8 = 0

Получаем корни:

α = (4)

Находим минимальное значение α = 1.9

x1=x0 + α d0 = (3;0.9)

Критерии останова процесса итераций:

1. y ≤ 0

2. |▽f(Xk)| < ε

3. Δf(X) = |f(Xk) - f(Xk-1)| < ε

4. ΔX = |Xk - Xk-1| < ε